



RENIECYT - LATINDEX - Research Gate - DULCINEA - CLASE - Sudoc - HISPANA - SHERPA UNIVERSIA - E-Revistas - Google Scholar  
DOI - REDIB - Mendeley - DIALNET - ROAD - ORCID

**Title:** Oscilación de un péndulo sujeto a una trayectoria horizontal con diferentes clases de movimiento.

**Authors:** ESPINDOLA-HEREDIA, Rodolfo, DEL VALLE, Gabriela, MUCIÑO-CRUZ, Damián y HERNANDEZ- MORALES, Guadalupe

Editorial label ECORFAN: 607-8695  
BCIERMMI Control Number: 2019-040  
BCIERMMI Classification (2019): 241019-040

Pages: 11  
RNA: 03-2010-032610115700-14

**ECORFAN-México, S.C.**  
143 – 50 Itzopan Street  
La Florida, Ecatepec Municipality  
Mexico State, 55120 Zipcode  
Phone: +52 1 55 6159 2296  
Skype: ecorfan-mexico.s.c.  
E-mail: contacto@ecorfan.org  
Facebook: ECORFAN-México S. C.  
Twitter: @EcorfanC

[www.ecorfan.org](http://www.ecorfan.org)

Holdings		
Mexico	Colombia	Guatemala
Bolivia	Cameroon	Democratic
Spain	El Salvador	Republic
Ecuador	Taiwan	of Congo
Peru	Paraguay	Nicaragua

# Introducción



Figura 1 Escena de la película los increíbles <https://www.youtube.com/watch?v=dB8jduTz06I>

# Introducción



Figura 2  
<http://cineclubgolfa.blogspot.com/2014/12/el-teatro-del-mundo.html>



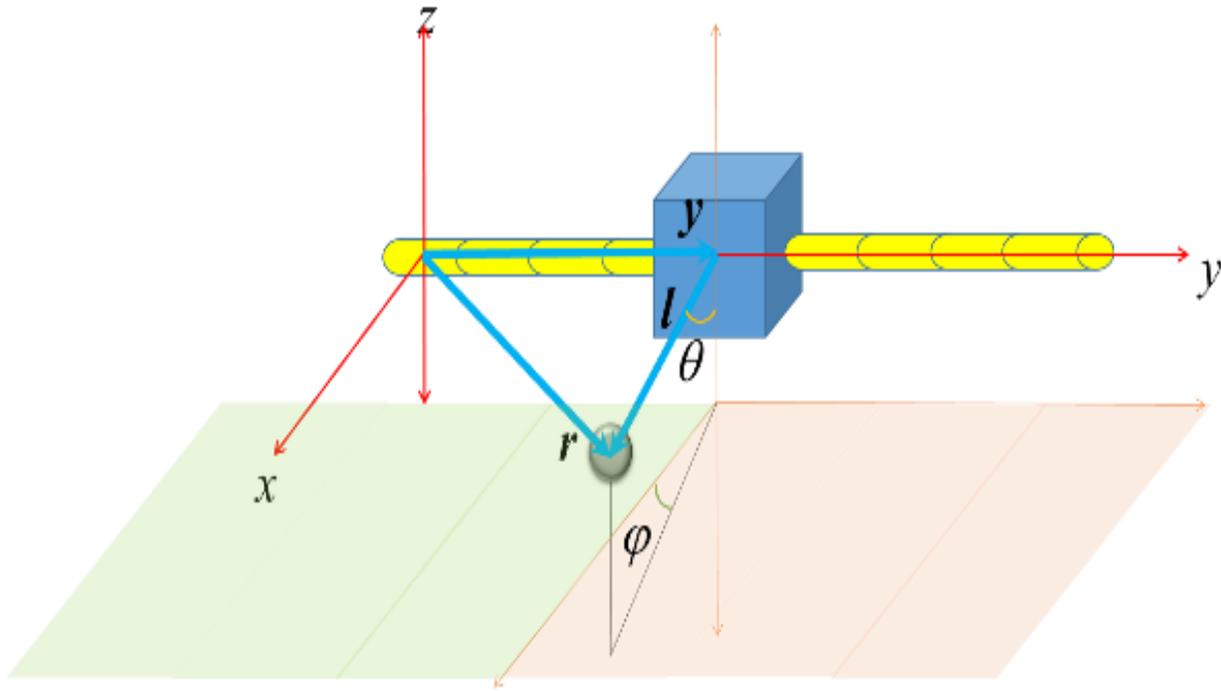
Vídeo 1 <http://youtu.be/ECxICSINHXM>



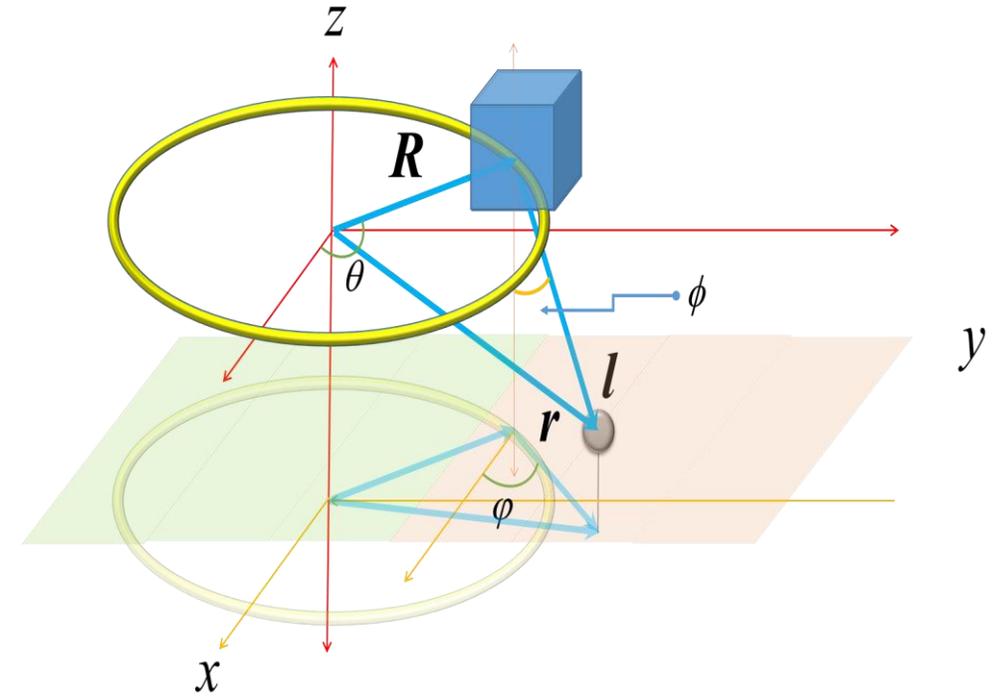
Figura 3  
<https://sites.google.com/site/grupo2s7gps/galeria-grandes-incendios?tmpl=%2Fsystem%2Fapp%2Ftemplates%2Fprint%2F&showPrintDialog=1>

# Metodología

## Sistemas de estudio



**Figura 2** Descripción del sistema de estudio.



**Figura 3** Descripción del sistema de estudio en movimiento circular uniforme.

# Teoría

## Energías del sistema lineal

$$K_m = \frac{1}{2} m \left( l^2 \sin^2 \theta \dot{\theta}^2 + (-l \sin \theta \sin \varphi \dot{\theta} + l \cos \theta \cos \varphi \dot{\varphi})^2 + (\dot{y} + l \cos \theta \sin \varphi \dot{\theta} + l \cos \varphi \sin \theta \dot{\varphi})^2 \right)$$

$$K_M = \frac{1}{2} M \dot{y}^2$$

$$U_{g_m} = -m g l \cos \theta$$

## Energías del sistema Circular

$$K_m = \frac{1}{2} m \left( R^2 \dot{\theta}^2 + 2lR\dot{\theta} (-\cos \phi \sin(\theta - \varphi)\dot{\phi} + \cos(\theta - \varphi) \sin \phi \dot{\varphi}) + l^2 (\dot{\phi}^2 + \sin^2 \phi \dot{\varphi}^2) \right)$$

$$K_M = \frac{1}{2} M R^2 \dot{\theta}^2$$

$$U_{g_m} = -m l g \cos \phi$$

$$L = K - U.$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial L}{\partial q} = 0,$$

# Teoría

## Ecuaciones de movimiento MRUA

$$\ddot{\theta} = \frac{2g \sin \theta + l \sin 2\theta \dot{\theta}^2 + 2l \sin 2\varphi \dot{\theta}\dot{\varphi} + 2 \cos \theta \sin \varphi \ddot{y}}{-2l + l \cos 2\theta + l \cos 2\varphi}$$

$$\ddot{\varphi} = -\frac{\sec \varphi \sin \theta \ddot{y}}{l} + \tan \varphi (\dot{\theta}^2 + \dot{\varphi}^2)$$

$$\ddot{y} = \left( \frac{l m}{(m + M)} \right) (\sin \theta \sin \varphi (\dot{\theta}^2 - \dot{\varphi}^2) - \cos \theta (2 \cos \varphi \dot{\theta}\dot{\varphi} + \sin \varphi \ddot{\theta}) - \cos \varphi \sin \theta \ddot{\varphi})$$

## Ecuaciones de movimiento MCUA

$$\ddot{\theta} = \left( \frac{-l m}{(m + M)R} \right) (\sin(\theta - \varphi) \sin \phi (\dot{\phi}^2 + \dot{\varphi}^2) - \cos \phi \ddot{\phi} + \cos(\theta - \varphi) (2 \cos \phi \dot{\phi}\dot{\varphi} + \sin \phi \ddot{\varphi}) +)$$

$$\ddot{\phi} = -\frac{g \sin \phi}{l} + \frac{R \cos \phi (\cos(\theta - \varphi) \dot{\theta}^2 + \sin(\theta - \varphi) \ddot{\theta} + l \sin \phi \dot{\varphi}^2)}{l}$$

$$\ddot{\varphi} = \left( \frac{R \csc \phi}{l} \right) (\sin(\theta - \varphi) \dot{\theta}^2 - \cos(\theta - \varphi) \ddot{\theta}) - 2 \cot \phi \dot{\phi}\dot{\varphi}$$

## Detalles de la simulación MRUA

Simulación MRUA					
prop	valor	unidad	prop	valor	unidad
g	9.78	m/s <sup>2</sup>	$y_0$	0.1	m
a	0	adim	$\dot{y}_0$	3.1	m/s
b	1.1	adim	$\theta_0$	1.1	grad
n	1000	adim	$\dot{\theta}_0$	5.3	rad/s
l	0.45	m	$\phi_0$	1.5	grad
m	0.27	Kg	$\dot{\phi}_0$	5.1	rad/s
M	0.332	kg	N	21	adim

**Tabla 1** Valores de propiedades y condiciones iniciales.

$$\begin{aligned} \dot{y}_0 &= \dot{y}_0 + 0.09 \\ \dot{\theta}_0 &= \dot{\theta}_0 + 0.09 \\ \dot{\phi}_0 &= \dot{\phi}_0 + 0.10 \end{aligned}$$

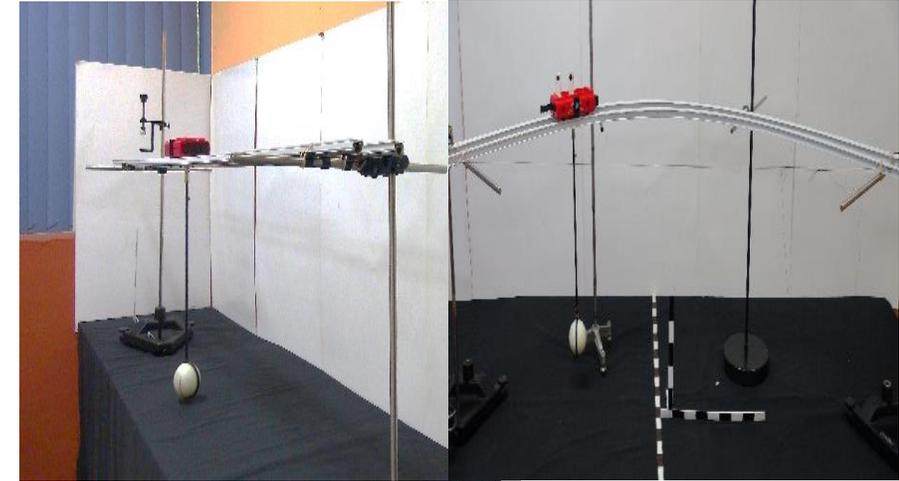
## Detalles de la simulación MCUA

Simulación MCUA					
prop	valor	unidad	Prop	valor	unidad
a	0.000	m/s <sup>2</sup>	$\theta_0$	1.10	m
b	1.100	adim	$\dot{\theta}_0$	3.30	m/s
n	700	adim	$\phi_0$	1.10	grad
R	0.450	M	$\dot{\phi}_0$	6.30	rad/s
l	0.350	M	$\varphi_0$	1.10	grad
m	0.270	Kg	$\dot{\varphi}_0$	10.1	rad/s
M	0.332	Kg	N	25	adim

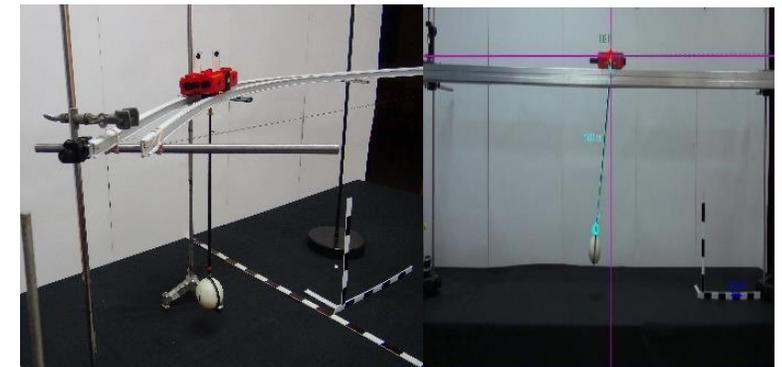
**Tabla 2** Valores de propiedades y condiciones iniciales

$$\begin{aligned} \dot{\theta}_0 &= \dot{\theta}_0 + 0.09 \\ \dot{\phi}_0 &= \dot{\phi}_0 + 0.10 \\ \dot{\varphi}_0 &= \dot{\varphi}_0 + 0.10 \end{aligned}$$

## Detalles de la experimentación MCUA

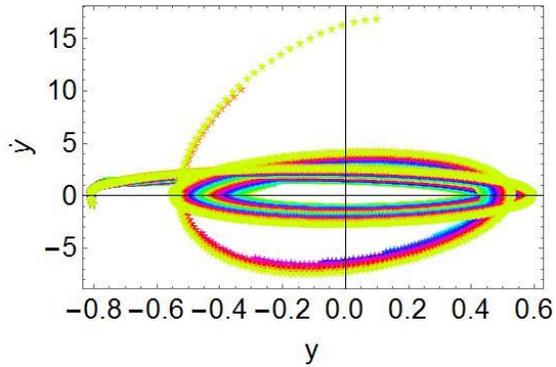


**Figura 4** Dispositivo experimental para el movimiento circular uniforme.

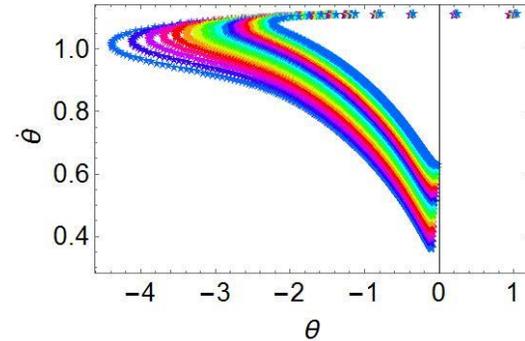


**Figura 5** Dispositivos experimentales para ambos movimientos: rectilíneo uniforme y circular uniforme.

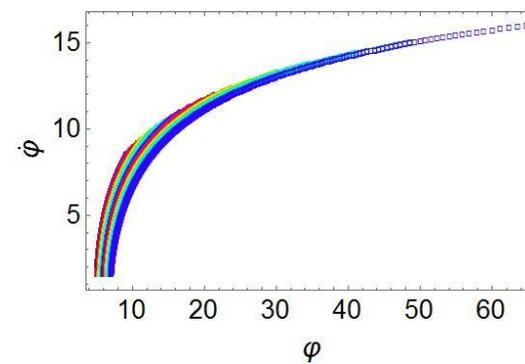
# Resultados MRUA



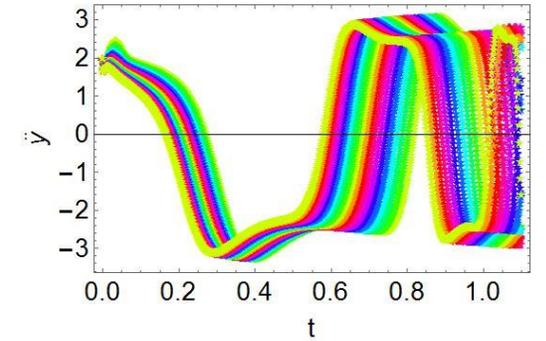
**Gráfico 1** Diagrama fase para la coordenada  $y$



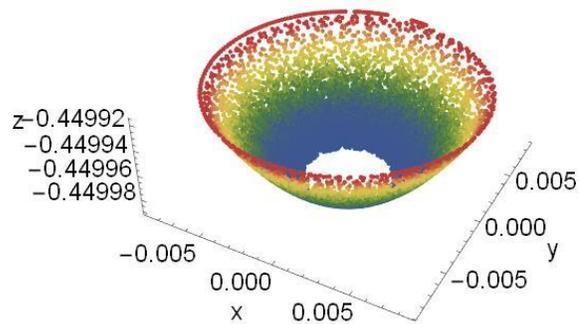
**Gráfico 2** Diagrama fase para la coordenada  $\theta$



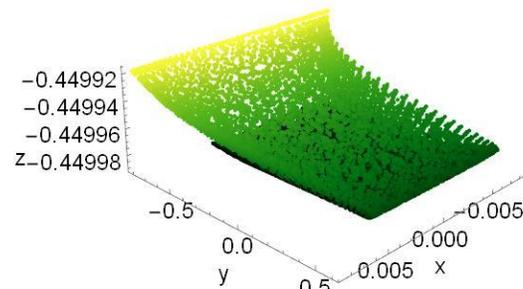
**Gráfico 3** Diagrama fase para la coordenada  $\varphi$



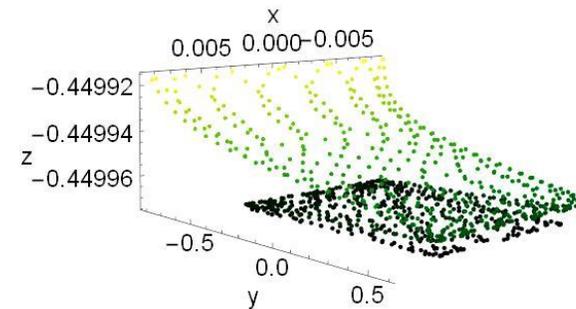
**Gráfico 4** Resultado para la aceleración en la dirección  $y$ : ( $t$  vs.  $y$ )



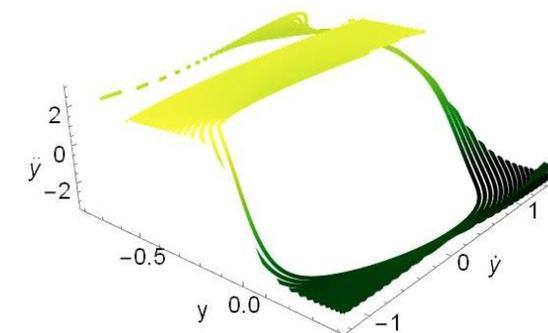
**Gráfico 5** Resultado para la posición de la masa pendular, en coordenadas rectangulares, a partir de un observador fijo en el objeto  $M$ .



**Gráfico 7** Resultado para la posición de la masa pendular, en coordenadas rectangulares. A partir de un observador fijo en el origen de coordenadas.



**Gráfico 8** Resultado para la posición de la masa pendular, en coordenadas rectangulares. A partir de un observador fijo en el origen de coordenadas.



**Gráfico 9** Comportamiento de la coordenada  $y$ , se muestra la relación entre posición, velocidad y aceleración.

# Resultados MCUA

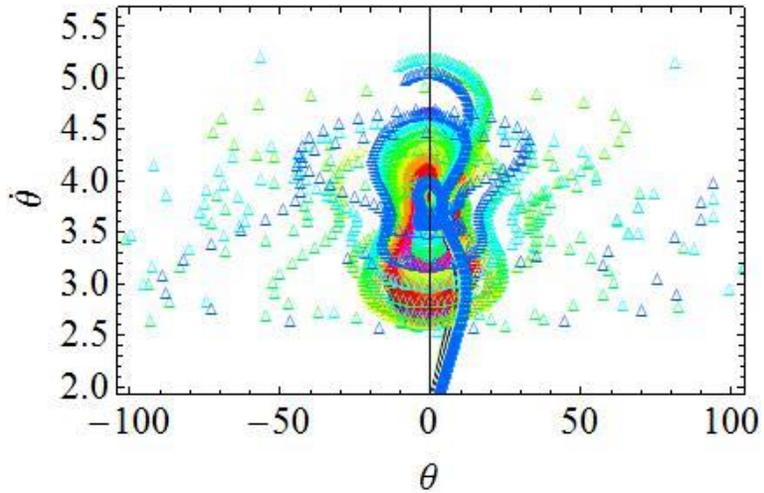


Gráfico 14 Plano fase para la coordenada  $\theta$ .

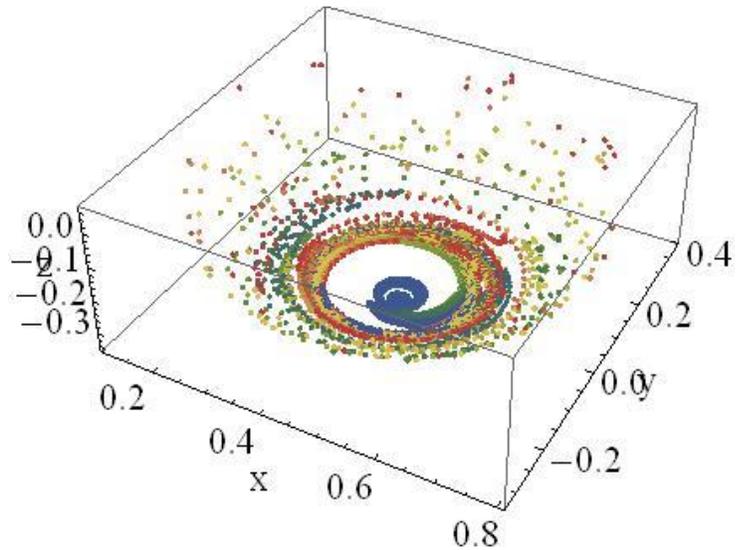


Gráfico 16 Trayectorias espaciales para el comportamiento de la masa pendular en el movimiento circular uniformemente acelerado.

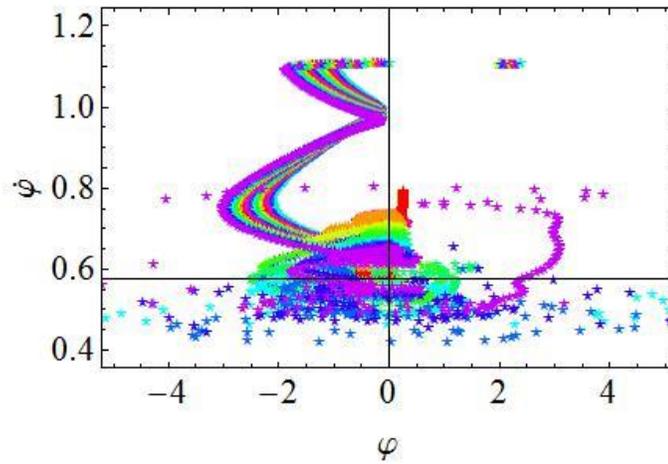


Gráfico 15 Diagrama fase para la variable angular  $\varphi$ .

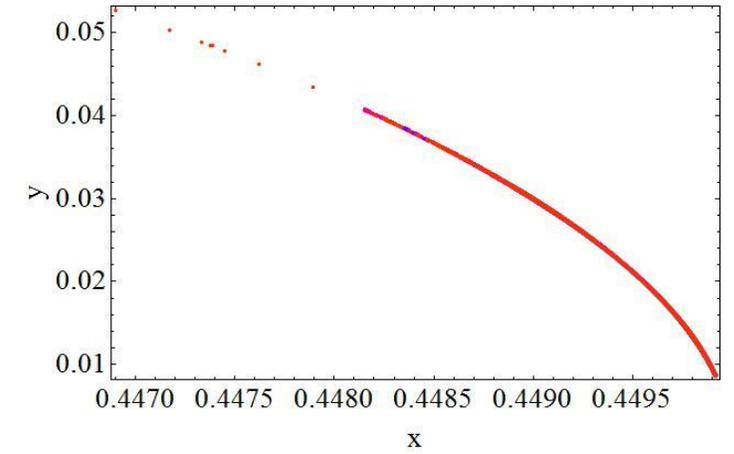


Gráfico 18 Trayectorias correspondiente a las posiciones  $(x, y)$  del objeto de masa  $M$ , sobre el movimiento circular.

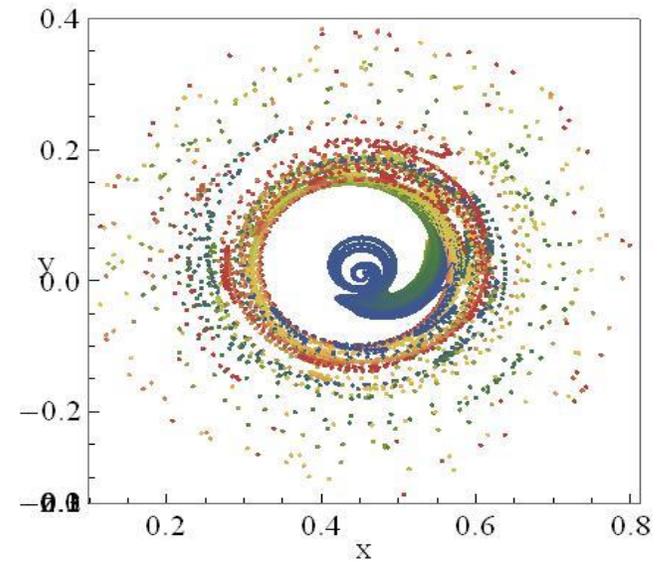
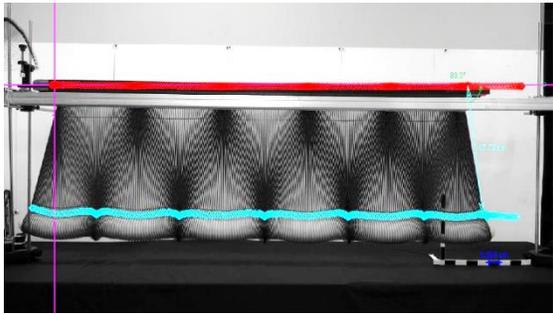
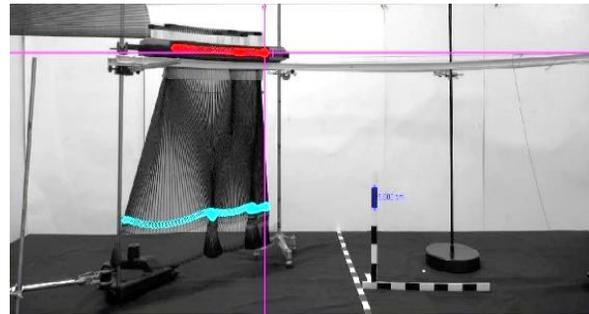


Gráfico 17 Trayectorias espaciales para el comportamiento de la masa pendular en el movimiento circular uniformemente acelerado en dos dimensiones, correspondiente a las coordenadas  $(x, y)$ .

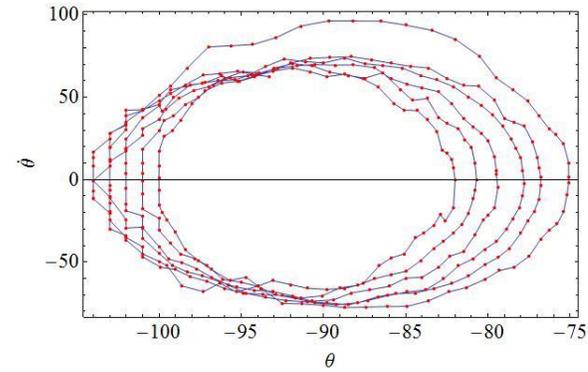
# Resultados Experimentales.



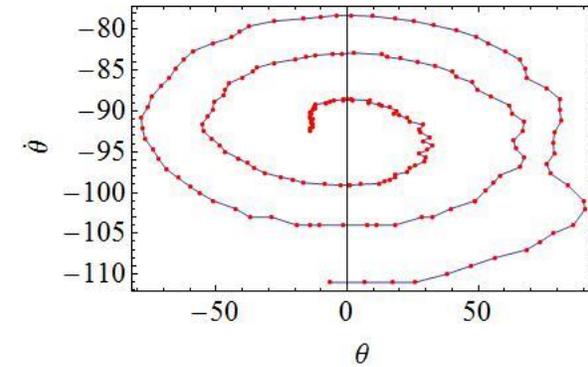
**Figura 6** Trayectorias espaciales para el comportamiento de la masa pendular en el movimiento rectilíneo acelerado.



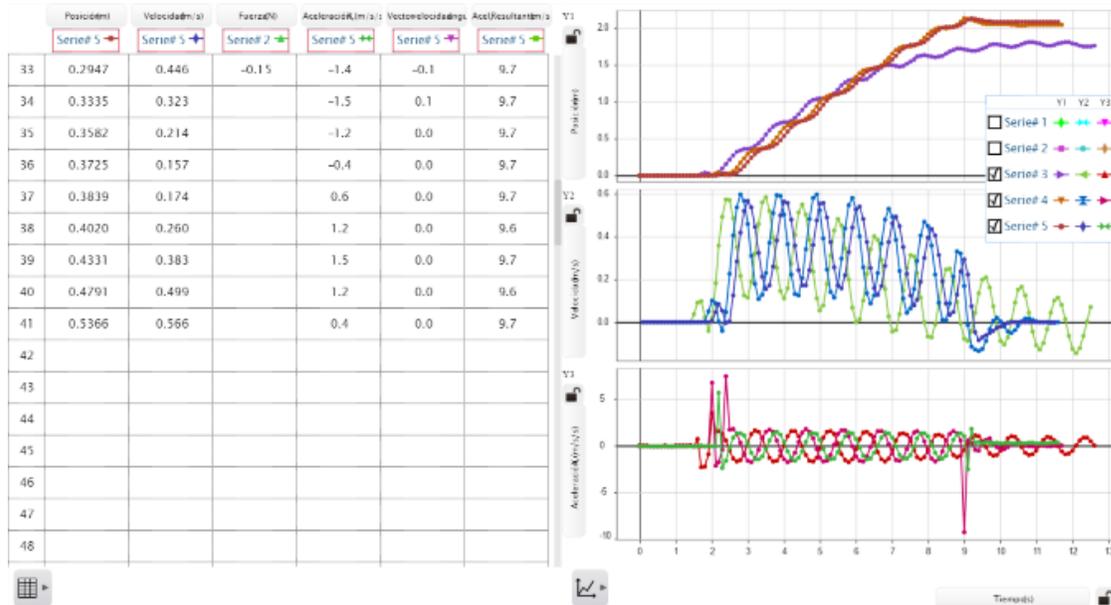
**Figura 7** Trayectorias correspondiente a las posiciones de la masa pendular  $m$  y del objeto  $M$  en el movimiento circular.



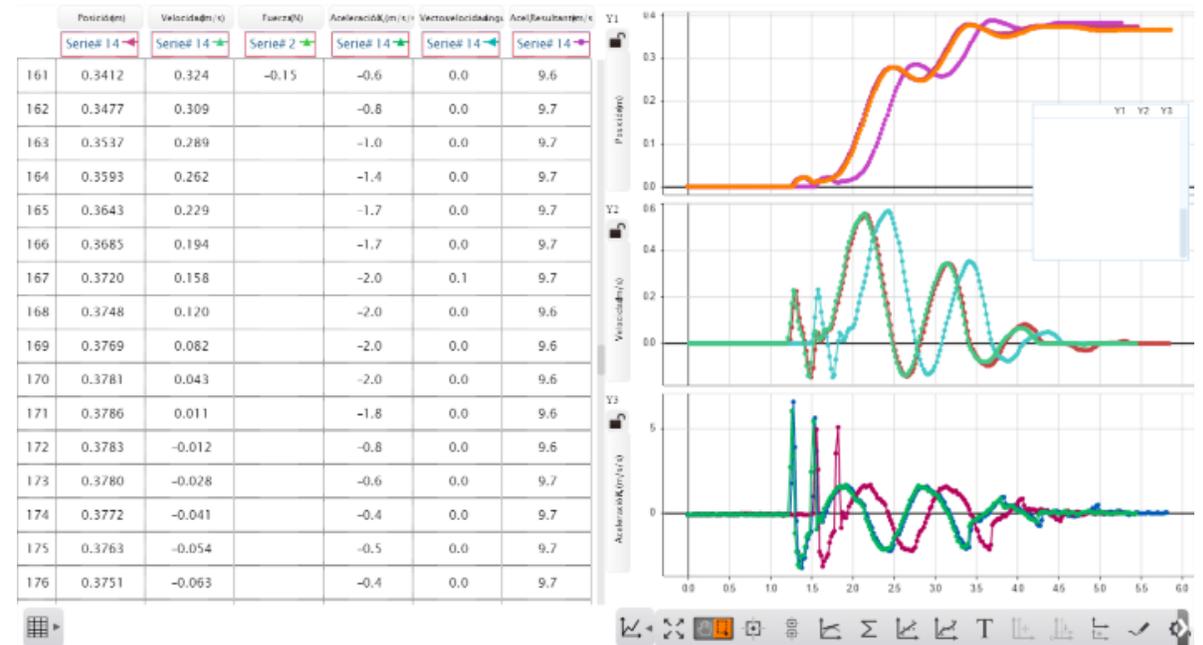
**Gráfico 19** Trayectorias correspondiente a las posiciones  $(\theta, \dot{\theta})$  de la masa pendular  $m$ .



**Gráfico 21** Resultados obtenidos por medio del sensor para el movimiento lineal.



**Gráfico 20** Resultados obtenidos por medio del sensor para el movimiento lineal.



**Gráfico 22** Resultados obtenidos por medio del sensor para el movimiento circular.

# Conclusiones

Se presentó el análisis teórico del sistema compuesto por un objeto de masa  $M$  al cual se le sujeta un péndulo de longitud  $l$  y masa pendular  $m$ , moviéndose en dos clases de movimientos: rectilíneo uniformemente acelerado y circular uniformemente acelerado, suponemos que ambos movimientos son uniformes, sin embargo el análisis muestra que es debido al acoplamiento de los objetos, y a las oscilaciones del péndulo, que se afecta el movimiento del objeto de masa  $M$ , de tal forma que su aceleración no resulta ser uniforme.

El análisis teórico muestra que a pesar de ser un sistema con aceleración variable, se conserva el momento lineal del objeto de masa  $M$ , no así el de la masa pendular.

Se desarrolló un conjunto de simulaciones numéricas para obtener las soluciones de las ecuaciones diferenciales.

Del análisis de los resultados numéricos se concluye que el sistema tanto en movimiento lineal como en movimiento circular, son caóticos, sugiriendo de este modo la posibilidad de estudiarlos a través de la metodología propia para el análisis del caos, tales como: secciones de Poincaré y Coeficientes de Lyapunov, por ejemplo. De esta manera es posible ofrecer una evaluación cuantitativa más precisa del comportamiento caótico del sistema.

Se elaboraron los prototipos experimentales correspondientes para realizar una serie de experimentos y recabar información con el uso de herramientas propias como *Tracker*. Asimismo se utilizaron dispositivos inalámbricos para verificar de manera fenomenológica los resultados tanto numéricos como teóricos. La parte experimental requiere aún más cuidado ya que el movimiento del péndulo ocurre en  $3D$ , se encontró un acuerdo cualitativo en las comparaciones de realizadas para los resultados numéricos y experimentales. Sin embargo, se concluye que es necesario mejorar la obtención de los resultados experimentales para que la comparación entre ambas sea cuantitativa y no sólo cualitativa.

El estudio de esta clase de sistemas tiene importancia y relevancia ya que son utilizados comúnmente, en el manejo de grúas que transportan alguna carga, por decir, aviones y/o helicópteros que llevan las boyas para sofocar incendios, el objeto transportado se comporta como la masa pendular y desde luego su movimiento oscilatorio afecta el movimiento del objeto transportador.

El análisis mostrado hasta aquí ha permitido alcanzar soluciones teóricas, que permiten entender el comportamiento del sistema, numéricas que ayudan a entender la tendencia al caos del sistema y asimismo contribuyen a mejorar el uso de su implementación, y experimentales que nos permiten generar prototipos más adecuados para los fines requeridos.

# Referencias

- Douglas Brown. (2013). Sharing video experiments with tracker digital libraries. 15-mayo-2019, de Tracker Sitio web: <https://physlets.org/tracker/>
- Enrique, C., Yanitelli, M., y Giorgi, S. (2019). Perfiles conceptuales como instrumentos de evaluación de una intervención didáctica. *Avances en la enseñanza de la Física*, 1(1), 73-99.
- Herbert Goldstein, Charles Poole, John Safko. (2000). *Classical Mechanics*. New York: Addison Wesley.
- Jaime De la Colina y Jesús Valdés. (2010). Péndulo de prueba para el estudio dinámico de modelos estructurales. *Revista de Ingeniería Sísmica*, No 82, pp 35-56. 17-mayo-2019, De Scielo Base de datos.
- Jorge V. José and Eugene J. Saletan. (1998). *Classical Dynamics*. England: Cambridge University Press.
- Lorena A. Lemus C. (2019). Simulación computacional, desarrollo teórico y comparación experimental de un péndulo elástico. Universidad de San Carlos de Guatemala Escuela de Ciencias Físicas y Matemáticas Departamento de Física: Tesis de licenciatura, en Física Aplicada.
- Timothy Sauer. (2013). *Numerical Methods*. Chicago: PEARSON.
- W. E. Boyce and R. C. Di Prima. (2004). *Elementary Differential Equations and Boundary Value Problems*. New York: Wiley.
- Wolfram Research, Inc., *Mathematica*, Version 11.3, Champaign, IL (2018)
- Zúñiga, Francisco Agustín; Morales, Edgar Javier (2017). Diseño de una secuencia didáctica para el aprendizaje de la pendiente como razón de cambio para alumnos de nivel medio superior utilizando herramientas tecnológicas. En Serna, Luis Arturo (Ed.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa* (pp. 1495-1504). México, DF: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.



**ECORFAN®**

© ECORFAN-Mexico, S.C.

No part of this document covered by the Federal Copyright Law may be reproduced, transmitted or used in any form or medium, whether graphic, electronic or mechanical, including but not limited to the following: Citations in articles and comments Bibliographical, compilation of radio or electronic journalistic data. For the effects of articles 13, 162,163 fraction I, 164 fraction I, 168, 169,209 fraction III and other relative of the Federal Law of Copyright. Violations: Be forced to prosecute under Mexican copyright law. The use of general descriptive names, registered names, trademarks, in this publication do not imply, uniformly in the absence of a specific statement, that such names are exempt from the relevant protector in laws and regulations of Mexico and therefore free for General use of the international scientific community. BCIERMMI is part of the media of ECORFAN-Mexico, S.C., E: 94-443.F: 008- ([www.ecorfan.org/](http://www.ecorfan.org/) booklets)